

# ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА

УДК 532.516

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ АСПЕКТЫ КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ РАСПЛАВА ЧАСТЬ 2. ДВА ТИПА ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ КЛАСТЕРНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ

**О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### Введение

Продолжим исследование [1] гидродинамической задачи Куэтта, классическая постановка которой расширяется нами по следующим направлениям: 1) учет релаксации вязких напряжений; 2) учет нелинейной внешней силы трения Рэлея, действующей в неизотермических условиях. Сила трения  $\mathbf{F}^R = -\zeta \mathbf{v}$  служит моделью сопротивления, которое оказывают течению кластерные образования в расплаве полупроводников [2]. Цель второй части статьи – изучить неклассические профили скорости и температуры в вязкоупругом потоке, испытывающем воздействие силы сопротивления и объемного источника энергии; проанализировать тепловое состояние вязкого течения при конкуренции источника и стока импульса.

### Свойства неизотермического течения

Точное аналитическое решение уравнений гидродинамики вязкоупругой жидкости Максвелла имеет вид [3], [4]:

$$\bar{u} \equiv u/u_1 = 2\varepsilon[\sin(2\bar{y})]/\delta, \quad \bar{\tau} \equiv \tau/u_1 = (1 - \varepsilon^2)/\delta, \quad \delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(2\bar{y}); \quad (1)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \zeta y_1^2/\nu = D_1 D_2, \quad D_1 = (1 - 4\Gamma)/(1 + 4\Gamma)^2, \quad \Gamma = (\bar{\gamma} m \bar{\omega})^2, \quad D_2 = 4\bar{\tau}(\bar{\tau}_1 - 2\bar{\tau}), \quad (2)$$

$$d\bar{u}/d\bar{y} = -2\bar{\omega} = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}), \quad \bar{y} = y/y_1, \quad y_1 > 0, \quad u_1 > 0, \quad \bar{v} = v/(u_1 y_1);$$

$$\bar{q}_v \equiv q_v c_1 y_1^2 / (\lambda u_1^2) = 4\bar{\tau}(-3\bar{\tau}_1 \bar{\tau} + 2\bar{\tau}^2 + 1), \quad \bar{\tau}_1 = (1 + \varepsilon^2)/(1 - \varepsilon^2), \quad (3)$$

$$\bar{p} = -\bar{\gamma} \bar{\tau}_{12} d\bar{u}/d\bar{y}, \quad \bar{\tau}_{12} = \bar{v}(d\bar{u}/d\bar{y}) \left[ 1 + (\bar{\gamma} d\bar{u}/d\bar{y})^2 \right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_e = \bar{q}_v / \bar{T}, \quad \bar{\sigma}_i = (u_{11} \bar{q} / \bar{T})^2, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_i.$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр решения;  $\delta > 0$  при  $\varepsilon^2 \neq 1$ . Изотермический режим ( $\varepsilon = 1$ ) был изучен в [1]. Если  $\varepsilon^2 < 1$ , то  $\tau > 0$ , течение происходит в «горячей» области,  $T > T_0$ . Если  $\varepsilon^2 > 1$ , то  $\tau < 0$ , имеем «холодную» область,  $0 < T < T_0$ . Безразмерные величины отмечены чертой сверху. Смысл всех применяемых обозначений раскрыт в статье [1]. Напомним только, что  $u$  – скорость;  $T$  – температура;  $\zeta$  – коэффициент сопротивления;  $q_v$  – объемная мощность внутренних источников энергии;  $\tau = (c_1/u_1)(T - T_0)$ ;

$T_0$  – отсчетная температура;  $y$  – поперечная потоку координата;  $c_1$ ,  $y_1$ ,  $u_1$  – положительные константы, имеющие размерности удельной теплоемкости, длины, скорости соответственно;  $\omega$  – завихренность;  $\gamma$  – время релаксации вязких напряжений;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $\tau_{12}$  – вязкое касательное напряжение;  $p$  – давление;  $\sigma_e$  – производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой;  $\sigma_i$  – производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов;  $m = 1$  для вязкоупругой жидкости;  $m = 0$  для ньютоновской жидкости. Корреляция «скорость–температура» характеризуется выражением (12) из [1]. Тепловой поток подсчитывается по формуле

$$q = -\lambda dT / dy, \quad \bar{q} \equiv qc_1 y_1 / (\lambda u_1^2) = -2\bar{u}\bar{\tau}. \quad (4)$$

Решение (1) позволяет изучить течение Куэтта между параллельными плоскими непроницаемыми стенками; одна стенка неподвижна, а другая перемещается в своей плоскости с постоянной скоростью  $u_2 = u(y_2) > 0$ ,  $2y_2 / y_1 = \pi / 2$ . Изучаем два интервала. Левый интервал:  $2\bar{y} \in [0, \pi / 2]$ , левая граница неподвижна. Правый интервал:  $2\bar{y} \in [\pi / 2, \pi]$ , правая граница неподвижна. Для обоих интервалов неподвижная стенка теплоизолирована, а температура подвижной стенки равна  $\tau(y = y_2)$ ; расстояние между стенками есть  $y_1 \pi / 4$ . На обоих интервалах  $\varepsilon < 0$ , профили скорости и температуры монотонные по координате  $\bar{y}$ .

Тепловой режим на границах обладает следующими свойствами. Левый интервал: в «холодной» области на неподвижной стенке имеем объемный сток энергии,  $q_v(y = 0) < 0$ , тепло подводится через подвижную стенку,  $q(y = y_2) < 0$  и  $q_v(y = y_2) > 0$ ; в «горячей» области на неподвижной стенке имеем объемное выделение энергии,  $q_v(y = 0) > 0$ , тепло отводится через подвижную стенку,  $q(y = y_2) > 0$  и  $q_v(y = y_2) < 0$ .

Правый интервал: в «холодной» области имеем объемное выделение энергии на обеих стенках,  $q_v(2\bar{y} = \pi / 2) > 0$ ,  $q_v(2\bar{y} = \pi) > 0$ , и тепло отводится через подвижную стенку,  $q(2\bar{y} = \pi / 2) < 0$ ; в «горячей» области происходит объемный сток энергии на обеих стенках, и тепло подводится через подвижную стенку,  $q(2\bar{y} = \pi / 2) > 0$ .

При экспериментальном изучении изотермических турбулентных течений жидкости в плоском канале применяют так называемые индикаторные функции [5]:

$$\varphi_1 = \bar{y} d\bar{u} / d\bar{y}, \quad \varphi_2 = (\bar{y} / \bar{u})(d\bar{u} / d\bar{y}).$$

Физический смысл индикаторов в том, что если  $\varphi_1 = \text{const}$ , то профиль скорости логарифмический; если  $\varphi_2 = \text{const}$ , то профиль скорости степенной. В изотермическом варианте для профиля скорости (1) индикаторная функция есть

$$\varphi_3 = (d\bar{u} / d\bar{y}) / (1 + \bar{u}^2) = 1.$$

При  $\varepsilon^2 \neq 1$  из формулы (4) для теплового потока получаем индикатор

$$\varphi_4 = \bar{q} / (\bar{u}\bar{\tau}) = -2.$$

Температурное поле характеризуется следующими индикаторными функциями:

$$\Phi_1 = \bar{y} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{y}}, \quad \Phi_2 = \frac{\bar{y}}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{y}}.$$

Расчеты показывают, что профили скорости и температуры (1), формирующиеся под воздействием нелинейной внешней силы трения, существенным образом отличаются во всех своих точках и от логарифмического и от степенного законов.

Некоторые результаты подробного численного анализа динамических и тепловых процессов в «горячей» и «холодной» областях представлены на рис. 1–3. Каждая группа расчетов состоит из двух частей: 1) построение профилей изучаемых величин в зависимости от безразмерной поперечной координаты  $\bar{y}$ ; 2) построение функциональных связей между параметрами течения, раскрывающих физическое содержание изучаемого явления. Основное внимание обращено на неизотермические свойства завихренности и на роль температурного фактора в формировании поля давления, вязкого напряжения, теплового потока, коэффициента внешнего сопротивления и производства энтропии. Безразмерный параметр  $u_{11} = u_1^2 / (c_1 T_0)$  несет информацию о соотношении между кинетической и тепловой энергиями в системе «жидкость – источник энергии».

В ходе вычислений размеры левого и правого интервалов уточняются на основе ограничения  $\zeta > 0$ . В «горячей» области различия между левым  $[0, 1\pi; 0, 25\pi]$  (рис. 1) и правым  $[0, 25\pi; 0, 5\pi]$  интервалами имеют только количественный характер; для правого интервала графики расчетов не приводятся. В «холодной» области (рис. 2 и 3) наблюдаются существенные отличия в поведении всех гидродинамических и тепловых параметров для левого и правого интервалов. Это объясняется температурными свойствами  $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{\tau})$ . Таким образом, на рис. 1–3 показаны свойства трех различных течений Куэтта. Существенно, что в «холодной» области на правом интервале имеем  $g$ -тип сопротивления:  $d\bar{\zeta}/d\bar{\tau} > 0$  (рис. 3).

В «горячей» области на левом интервале по мере роста температуры  $\bar{\tau}$ , т. е. при удалении от равновесной температуры  $T_0$ , происходит переключение « $g \rightarrow l$ » типа сопротивления; это хорошо видно на графике функции  $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{\tau})$  в правом верхнем углу рис. 1. На левом интервале в «холодной» области (рис. 2), зависимость  $\bar{\zeta}(\bar{\tau})$  немонотонная, тоже имеет максимум:  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_*$ ,  $d\bar{\zeta}/d\bar{\tau} = 0$ ,  $d^2\bar{\zeta}/d\bar{\tau}^2 < 0$ , но направление переключения здесь другое. При удалении от равновесной температуры  $T_0$ , т. е. при возрастании  $|\bar{\tau}|$ , происходит переключение « $l \rightarrow g$ » типа сопротивления. Физическое содержание двух названных типов сопротивления раскрыто в [1].

Что касается производства энтропии, то здесь мы отметим только качественные его свойства. «Горячая» область: для левого и правого интервалов  $\partial\bar{\sigma}_e/\partial\bar{\tau} < 0$ ,  $\bar{\sigma}_e < 0$ ;  $\partial\bar{\sigma}_i/\partial\bar{\tau} > 0$ ,  $\bar{\sigma}_i > 0$ . «Холодная» область: для левого интервала  $\bar{\sigma}_e(\bar{\tau})$  – знакопеременная монотонная функция,  $\partial\bar{\sigma}_e/\partial\bar{\tau} > 0$ ; вместе с тем  $\bar{\sigma}_i > 0$ , причем  $\bar{\sigma}_i(\bar{\tau})$  – немонотонная функция, имеющая максимум при  $\bar{\tau} = -2,5$ . Для правого интервала обе функции  $\bar{\sigma}_e(\bar{\tau})$  и  $\bar{\sigma}_i(\bar{\tau})$  – положительные, монотонно убывающие.

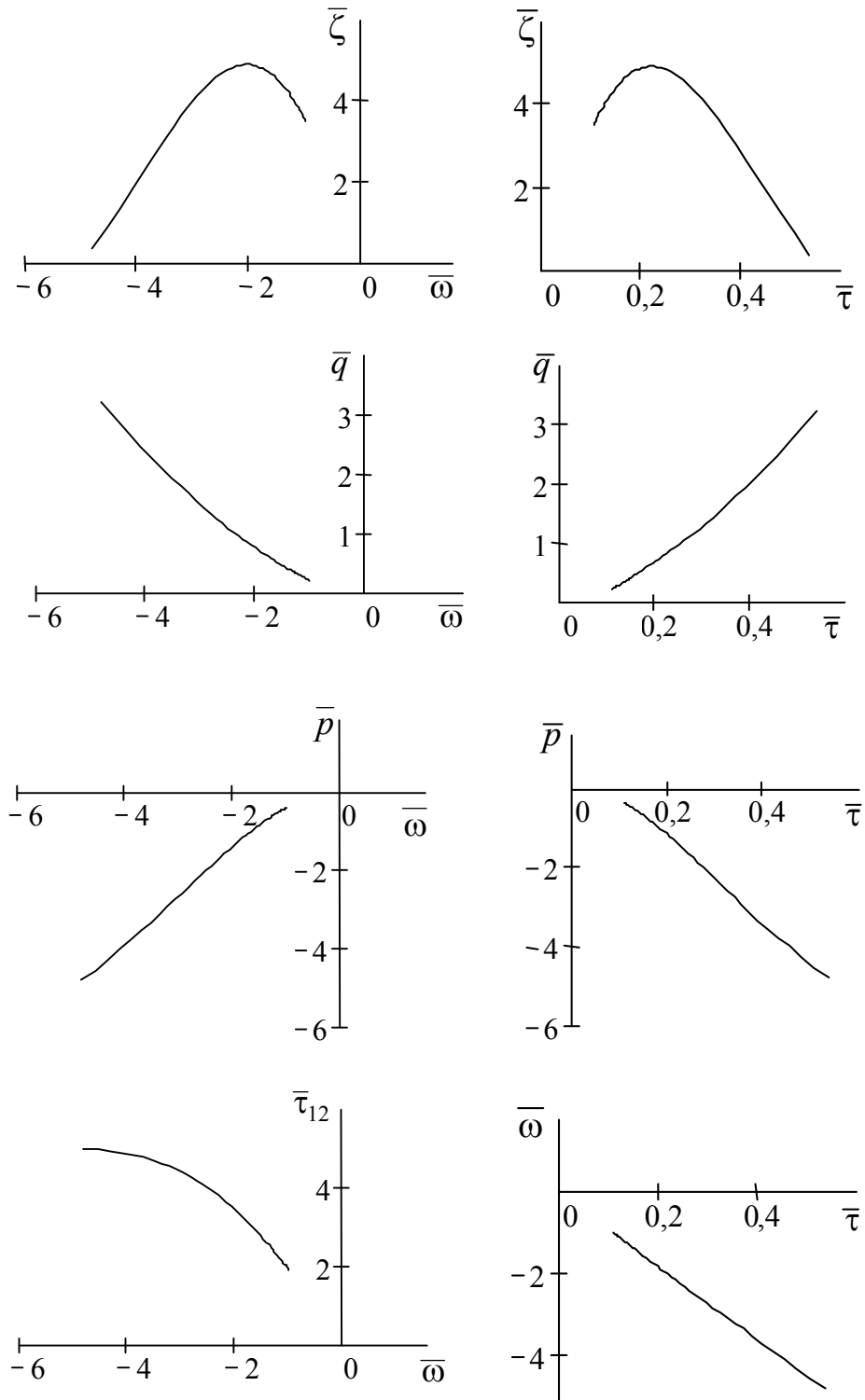


Рис. 1. Функциональные связи между безразмерными параметрами течения.

«Горячая» область, левый интервал:  $\bar{y} \in [0, 1\pi; 0, 25\pi]$ .

Входные параметры:  $\varepsilon = -0,9$ ;  $\bar{\gamma} = 0,1$ ;  $m = 1$ ;  $\bar{v} = 1$ ;  $u_{11} = 0,5$

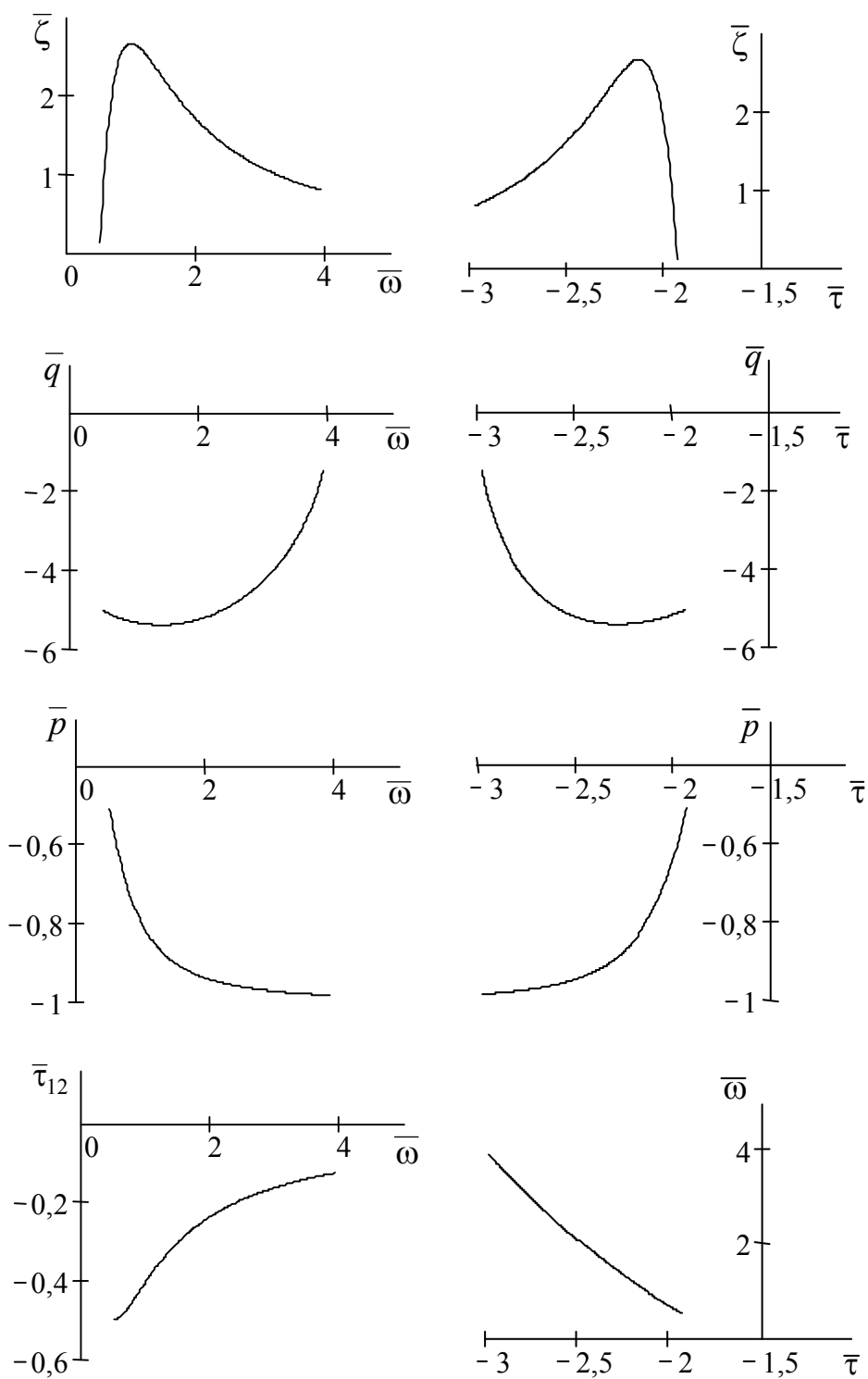


Рис. 2. Функциональные связи между безразмерными параметрами течения.

«Холодная» область, левый интервал:  $\bar{y} \in [0,01\pi; 0,085\pi]$ .

Входные параметры:  $\varepsilon = -2$ ;  $\bar{\gamma} = 0,1$ ;  $m = 1$ ;  $\bar{v} = 1$ ;  $u_{11} = 0,5$

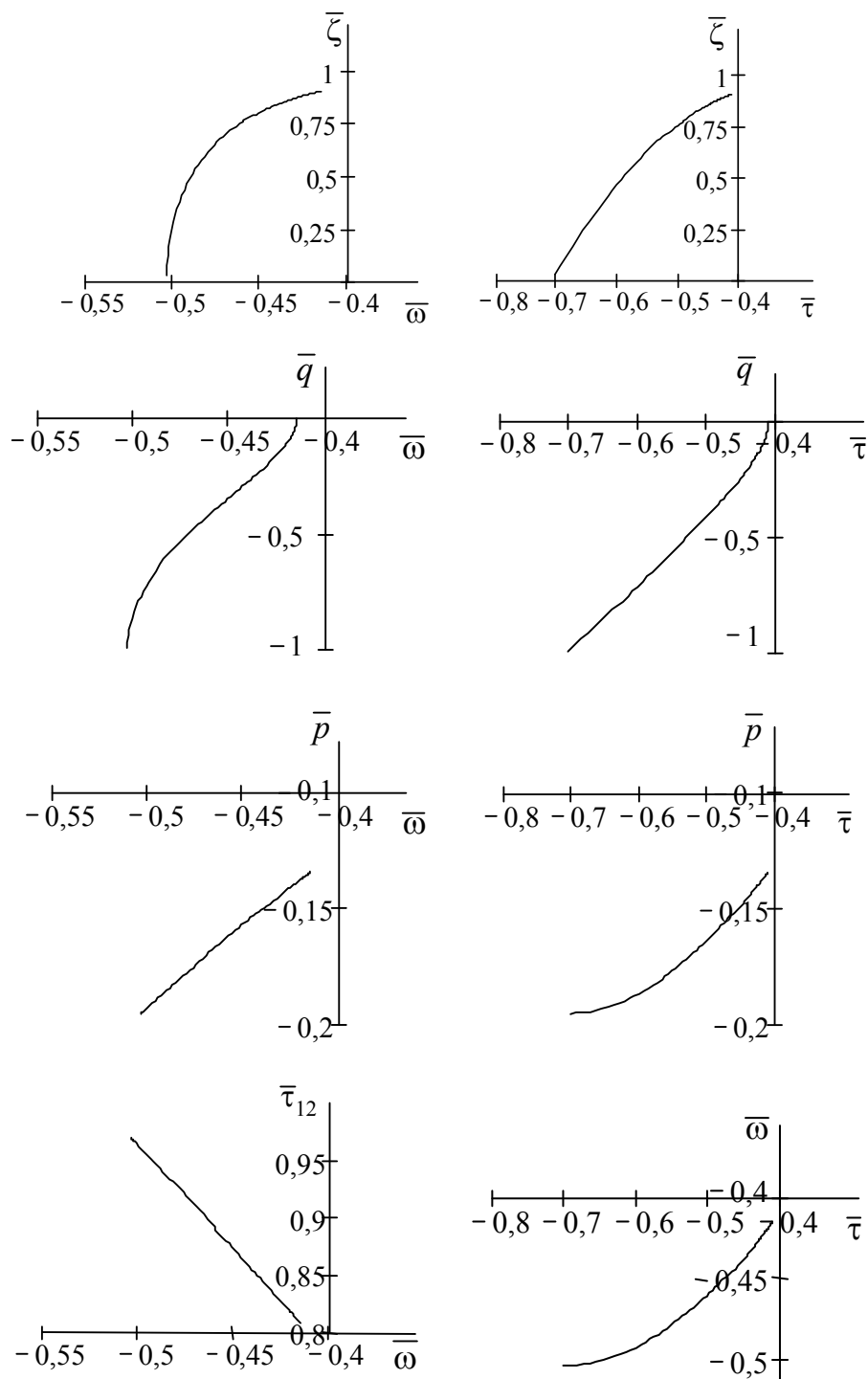


Рис. 3. Функциональные связи между безразмерными параметрами течения.

«Холодная» область, правый интервал:  $\bar{y} \in [0,25\pi; 0,5\pi]$ .

Входные параметры:  $\varepsilon = -2,4$ ;  $\bar{\gamma} = 0,2$ ;  $m = 1$ ;  $\bar{v} = 1$ ;  $u_{11} = 0,5$

### Конкуренция источника и стока импульса

В работе [3] показано, что решение (1) определяет течение вязкоупругой жидкости с объемным источником энергии (3) и с двумя конкурирующими источниками импульса:

$$\bar{F}_{11} = -\bar{u}\bar{\zeta}_r, \quad \bar{\zeta}_r = 2D_1(1 + \bar{u}^2), \quad \bar{F}_{12} = 6D_1\bar{\tau}^2\bar{u}. \quad (5)$$

Здесь  $\bar{\zeta}_r$  – коэффициент сопротивления;  $\bar{F}_{11}$  – внешняя сила трения (сток импульса);  $\bar{F}_{12}$  – источник импульса, конкурирующий с силой сопротивления. Оба эти источника мультипликативным образом зависят от  $D_1 = D_1(\bar{\gamma})$  [см. (2)], где  $\Gamma(\bar{\gamma})$  определяет неоднородные и неравновесные свойства вихревого поля, имеющего линейный масштаб релаксации  $L_1 = \gamma u_1$ ; результирующая массовая сила  $\bar{F}_1 = \bar{F}_{11} + \bar{F}_{12}$  действует в продольном (вдоль оси  $OX$ ) направлении. Условие  $\zeta_r \geq 0$  выполнено при  $\Gamma(\bar{\gamma}) \leq 1/4$ , а это приводит к неравенству  $\bar{\gamma}^2 m^2 \bar{\omega}_{\max}^2 \leq 1/4$ , которое справедливо при подходящем выборе  $\gamma$ .

В случае (5) наблюдается периодическое течение при  $y \in (-\infty, \infty)$ ,  $\varepsilon^2 \neq 1$ . Результаты численного анализа представлены на рис. 4–6. Расчеты были проведены для «горячей» и «холодной» областей. Из-за периодичности течения получаем гистерезисные (неоднозначные) связи теплового потока с завихренностью и температурой. Графики индикаторных функций  $\Phi_1(\bar{y})$ ,  $\Phi_2(\bar{y})$  говорят о принципиальных отличиях температуры  $\bar{\tau}(\bar{y})$  от степенного и логарифмического профилей. В «горячей» области имеем « $g \rightarrow l$ » режим переключения при  $\partial \bar{\tau} > 0$  (рис. 4). В «холодной» области имеем « $l \rightarrow g$ » режим переключения при росте  $|\bar{\tau}|$ . Эти варианты режимов переключения типов сопротивления аналогичны тем, что были получены для течений Куэтта (рис. 1, 2). На рис. 6 показаны нетривиальные свойства производства энтропии в зависимости от параметров  $u_{11}$  и  $\varepsilon > 0$ . Напомним, что параметр  $u_{11}$  характеризует соотношение между кинетической и тепловой энергиями, а параметр  $\varepsilon$  [см. (1)] определяет отклонение температуры жидкости от равновесного значения  $\bar{\tau} = 0$ . Хорошо видно, что сильная чувствительность  $\bar{\sigma}$  к изменению  $\varepsilon$  и  $u_{11}$  проявляется не только в количественном, но и в качественном отношениях.

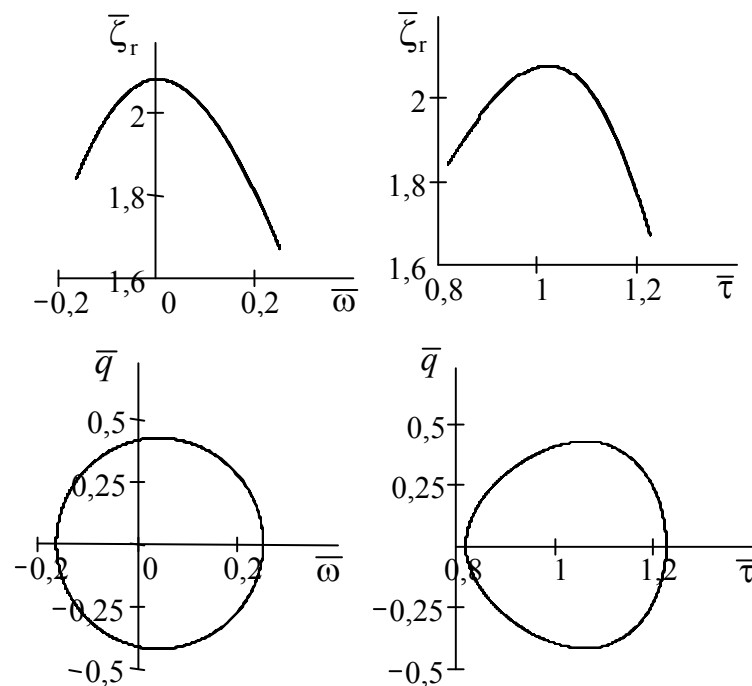


Рис. 4. Конкуренция источника и стока импульса. Динамические и тепловые свойства течения в «горячей» области.

Входные параметры:  $\varepsilon = -0,1$ ;  $\bar{\gamma} = 0,5$ ;  $m = 1$ ;  $\bar{v} = 1$ ;  $u_{11} = 0,5$ ;  $\bar{y} \in [-2\pi; 2\pi]$

(окончание см. на с. 72)

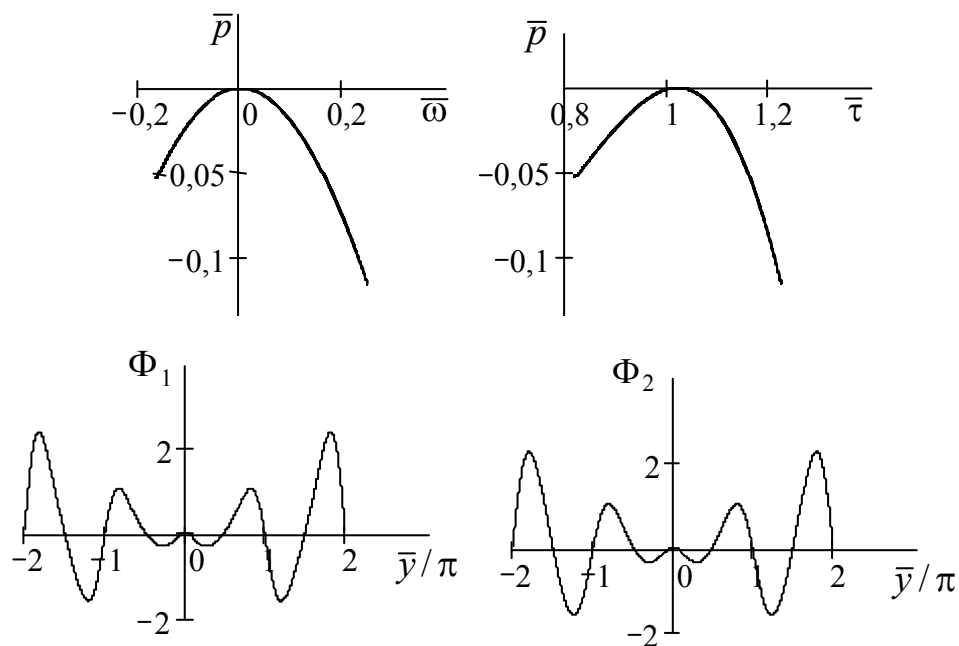


Рис. 4. Окончание (начало см. на с. 71)

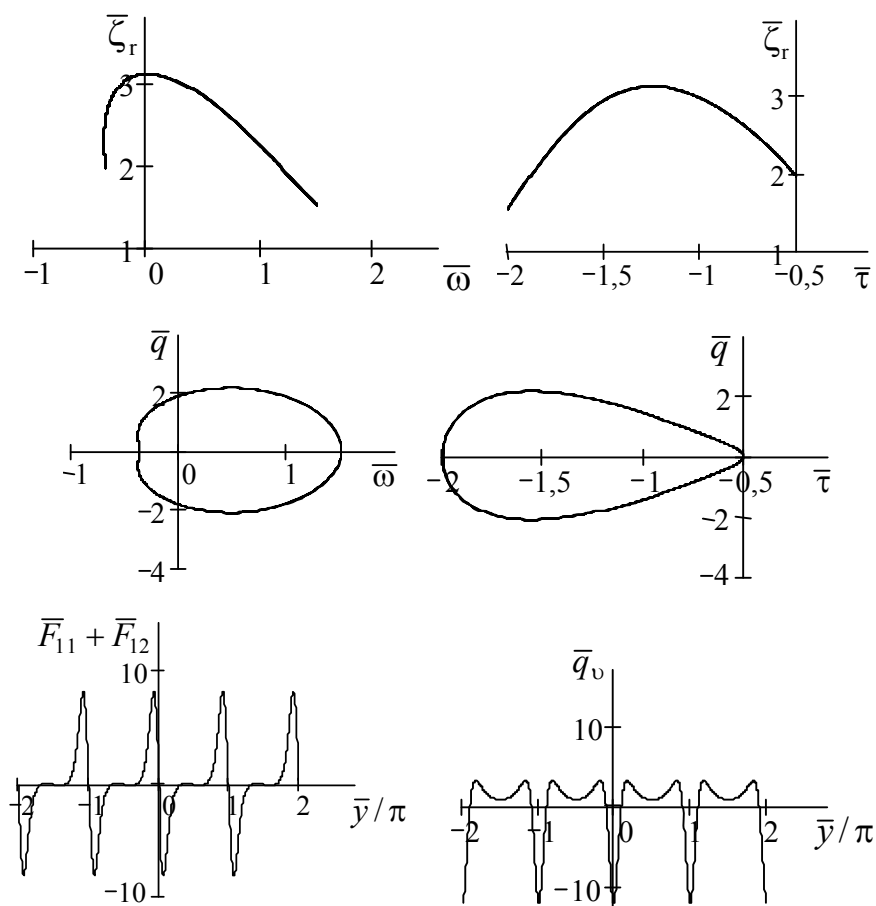


Рис. 5. Конкуренция источника и стока импульса. Динамические и тепловые свойства течения в «холодной» области.

Входные параметры:  $\varepsilon = -3$ ;  $\bar{\gamma} = 0,1$ ;  $m = 1$ ;  $\bar{v} = 1$ ;  $u_{11} = 0,1$ ;  $\bar{y} \in [-2\pi, 2\pi]$



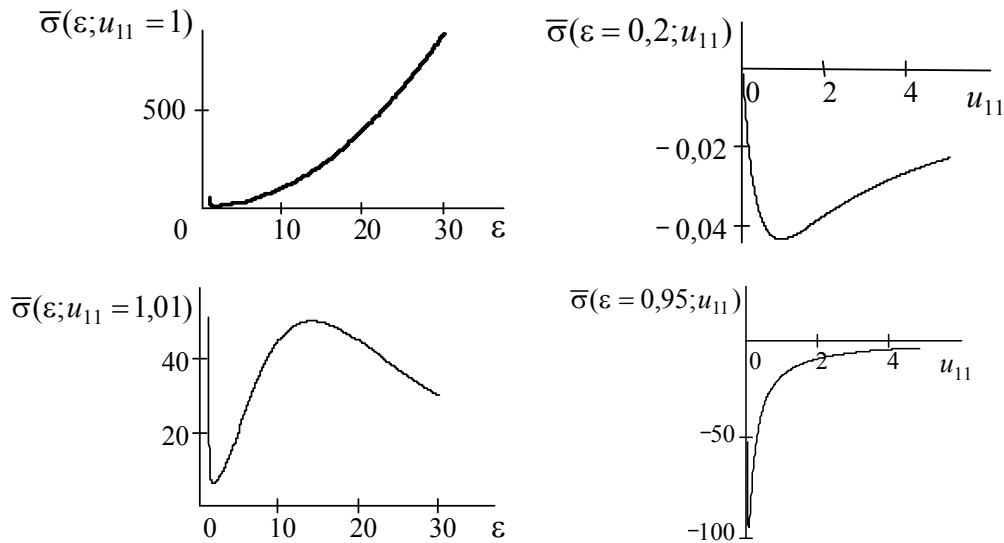


Рис. 6. Конкуренция источника и стока импульса. Параметрические свойства производства энтропии в «холодной» ( $\varepsilon > 1$ ) и «горячей» ( $0 < \varepsilon < 1$ ) областях

### Заключение

Изучены динамические и тепловые свойства трех новых сдвиговых течений типа течения Куэтта. Получены функциональные связи давления, касательного напряжения и теплового потока с завихренностью и с температурой. Построены индикаторные функции, иллюстрирующие неклассические свойства температурного профиля  $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{y})$ . Обнаружены условия, при которых происходит переключение режимов сопротивления « $g \rightarrow l$ » и « $l \rightarrow g$ », обусловленное немонотонной зависимостью коэффициента сопротивления кластерных образований от температуры жидкости. Установлены свойства периодического по координате течения, которое есть результат конкурентного взаимодействия источника и стока импульса. Указаны закономерности поведения производства энтропии.

### Литература

1. Шабловский, О. Н. Гидродинамические и тепловые аспекты кластерной модели структуры расплава Часть 1. Воздействие внешней силы сопротивления на завихренность вязкоупругого течения / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2016. – № 1. – С. 79–88.
2. Картавых, А. В. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / А. В. Картавых [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исслед. – 2004. – № 6. – С. 91–98.
3. Шабловский, О. Н. Вихрь скорости и производство энтропии в релаксирующем потоке вязкой жидкости с внутренними источниками / О. Н. Шабловский // Изв. высш. учеб. заведений и энерг. об-ний СНГ. Энергетика. – 2011. – № 5. – С. 55–65.
4. Шабловский, О. Н. Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах / О. Н. Шабловский // Фундамент. физ.-мат. проблемы и моделирование техн.-технол. систем. – 2010. – Вып. 13. – С. 78–89.
5. Wosnik, M. A theory for turbulent pipe and channel flows / M. Wosnik, L. Castillo, W. K. George // J. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 421. – P. 115–45.

Получено 05.04.2016 г.